# 16. Hausübung zu den Rechenmethoden der Physik SS 2000

## Abgabe am 10. 4. 2000 vor der Vorlesung

> ☞ Die Klausur findet am Samstag, 24. 6. 2000, 11.00–13.00 Uhr im GPHY statt.
>
> ☞ Voraussetzungen zur Scheinvergabe sind das Bestehen der Klausur und mindestens 40% der Hausübungspunkte.

### 46. Kurvenintegral und Bogenlänge

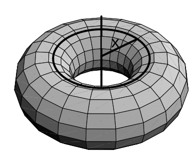
(a) Eine ebene Kurve sei durch $\vec{r}(t) \doteq \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad a \leq t \leq b$ gegeben. Zeigen Sie, dass sich die Bogenlänge durch $L = \int_a^b dt\, \sqrt{1 + (f'(t))^2}$ berechnen lässt.

(b) Weisen Sie außerdem nach, dass die Bogenlänge einer ebenen Kurve in Polarkoordinaten, d. h. $\vec{r}(\varphi) \doteq (r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin(\varphi))$, durch $L = \int_a^b d\varphi\, \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}$ gegeben ist.

(c) Berechnen Sie auf diese Weise die Bogenlängen der folgenden Kurven und skizzieren Sie deren Spur.

1. $f(t) = a\cosh\frac{t}{a}, \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad a > 0$ fest (Stück einer Kettenlinie).
2. $r(\varphi) = a\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad a > 0$ fest (Stück einer Archimedischen Spirale).
3. $r(\varphi) = a(1 + \cos\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad a > 0$ fest (Kardioide). (4)

### 47. Oberfläche eines Torus



Betrachten Sie einen Kreis $S$ vom Radius $R$ in der $xz$-Ebene. Der Mittelpunkt des Kreises habe von der $z$-Achse den Abstand $a > R$. Durch Rotation des Kreises um die $z$-Achse entsteht ein Torus. Berechnen Sie den Flächeninhalt $A$ der Torusoberfläche auf zweierlei Weisen.

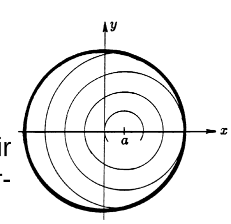
(a) Wenden Sie die aus der Vorlesung bekannten Formeln auf die Parameterdarstellung $\vec{r}(s,t) \doteq ((a + R\cos s)\cos t, (a + R\cos s)\sin t, R\sin s)$ an.

(b) Betrachten Sie eine Parametrisierung des Kreises $S$, $\vec{r}(t) \doteq (x(t), 0, z(t))$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$. Damit lässt sich die Oberfläche gemäß $A = \int_0^{2\pi} R\, dt\ 2\pi x(t)$ berechnen. Begründen Sie anschließend mit Hilfe der nebenstehenden Abbildung die angegebene Gleichung, die so genannte *Formel von Pappus*. (4)

### 48. Herdplatte

Eine kreisrunde Herdplatte (Radius $R$) werde inhomogen so geheizt, dass die pro Zeit und Fläche abgestrahlte Energie $I$ ($=$ Intensität $=$ $z$-Komponente der Energiestromdichte auf der Platte) quadratisch mit dem Abstand $d$ vom Punkt $\vec{r}_0 = (a, 0, 0)$ abnimmt:

$$I(\vec{r}) = I_0 \cdot \left(1 - \lambda \cdot d^2\right)$$
$$\vec{r} \doteq (x, y), \quad \text{2D Problem.}$$




Wieviel Energie pro Zeit (Leistung $P$) verliert die Platte durch Strahlung? Wir formulieren das Problem zunächst sowohl in kartesischen als auch in Polarkoordinaten und entscheiden erst dann.

*Zur Kontrolle:* $P = I_0\pi R^2(1 - \lambda R^2/2 - \lambda a^2)$ (4)